

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЙТРОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЯДЕРНОМ РЕАКТОРЕ И ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ НА ВОЗМОЖНОСТИ РАЗВИТИЯ АВАРИЙНЫХ СИТУАЦИЙ

В. В. Рязанов, С. Г. Шпырко

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина

В работах [1, 2] было проведено обобщение классической стохастической модели хранения. Частный случай такого обобщения с дополнительной функцией входа, связанной с источником нейтронов при делении ядер, дает возможность описывать поведение нейтронных процессов в ядерном реакторе. Получены соотношения для системы мгновенных нейтронов, а также для нейтронов и ядер-предшественников запаздывающих нейтронов при учете обратной связи по температуре. Преимущества предлагаемого подхода по сравнению с традиционными описаниями состоят в возможности детального и полного описания обратных связей (например, температурных) и эффектов управления. Так, для случая температурной обратной связи получены время до достижения фиксированного уровня, значение процесса в момент достижения уровня. Определяются и другие вероятностные функционалы: вероятности достижения процессом некоторых заданных уровней (например, вероятности того, что реактивность не превысит долю запаздывающих нейтронов и не произойдет разгон реактора на мгновенных нейтронах), время пребывания процесса над уровнем, экстремальные значения процесса, момент достижения экстремального значения, момент первого достижения уровня и т.д.

1. Введение

Для стохастического описания нейтронных процессов в ядерном реакторе использовались, как правило, ветвящиеся случайные процессы [3, 4]. В настоящей работе рассматривается непрерывное приближение для числа нейтронов – дискретной величины, так как рассматриваются реакторы, работающие на мощности, с большим числом нейтронов.

В работах [1, 2] рассмотрена стохастическая модель хранения запасов [5]

$$X(t) = X(0) + A(t) - \int_0^t r[X(u)]du, \quad (1)$$

где A – случайная функция входа; $r[X]$ – функция выхода. Функцию входа, как правило, задают преобразованием Лапласа вида

$$E(\exp\{-\theta A(t)\}) = \exp(-t\varphi(\theta)), \quad \varphi(\theta) = \int_0^{\infty} (1 - \exp\{-\theta x\}) \lambda b(x) dx, \quad (2)$$

где $E(\dots)$ обозначает усреднение; λ – интенсивность поступлений; $b(x)$ – плотность вероятности распределения величины скачков поступающего потока. Стохастическая модель хранения имеет простой физический смысл системы, в которую поступают элементы с некоторым вероятностным законом, а также выходят из нее.

Кинетическое уравнение марковского процесса для плотности вероятности $p(X, t)$ случайной величины $X(t)$

$$\frac{\partial p(X, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial^n}{\partial X^n}\right) K_n(X) p(X, t)/n! \quad (3)$$

выражается через кинетический потенциал

$$V(-\theta, X) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} K_n(X) \frac{(-\theta)^n}{n!}, \quad (4)$$

который служит производящей функцией кинетических коэффициентов

$$K_n(X) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int (X_1 - X)^n p(X_1|X) dX_1 / \tau; \quad \frac{\partial p(X, t)}{\partial t} = N_{ax} V\left(-\frac{\partial}{\partial X}, X\right) p(X, t), \quad (5)$$

где символ $N_{\partial X}$ указывает, что операторы $\partial/\partial X$ располагаются левее операторов умножения на X . Для процесса хранения (1) кинетический потенциал равен

$$V(-y, X) = -\varphi(y) + yr_{\chi}(X(t)), \quad r_{\chi}(X) = r(X) - r(0+)\chi_x; \quad \chi_x = 1, X = 0; \quad \chi_x = 0, X > 0. \quad (6)$$

В разделах 2 - 4 под случайной величиной запаса в системе понимается случайное число нейтронов в реакторе. В разделе 5 рассмотрен случайный процесс изменения коэффициента размножения и времена достижения заданного уровня реактивности.

2. Односкоростная точечная модель кинетики мгновенных нейтронов в реакторе

Рассмотрим в качестве примера модель хранения с линейным выходом $r = bX$ и входом, который зависит от X – величины запаса в системе, случайного числа нейтронов в ядерном реакторе – в нашем случае. Кинетический потенциал и функцию $\varphi_1(\theta)$ зададим в виде

$$V(-\theta, X) = -\varphi_0(\theta) + \theta bX - cX\varphi_1(\theta); \quad \varphi_1(\theta) = -\lambda_1 \left(\sum_{r=0}^{\infty} \pi_k e^{-\theta k} - 1 \right), \quad (7)$$

где третье слагаемое представляет собой добавку к входной функции $\varphi_0(\theta)$, пропорциональную X , $\sum_{r=0}^{\infty} \pi_k e^{-\theta k}$ – производящая функция (при $z = \exp\{-\theta\}$) распределения числа вторичных нейтронов в одном акте деления ядра, π_k – вероятности того, что при делении ядра нейтроном возникнет k вторичных нейтронов. Предположим, что функция $\varphi_0(\theta) = \varphi_q(\theta)$ в формуле (7) описывает источник нейтронов, а в формуле (7) $\lambda_1 = \langle v \rangle \Sigma_f$, $\langle v \rangle$ – средняя скорость нейтронов, Σ_f – макроскопическое сечение деления [6], $b = 1/l_{ef}$, l_{ef} – среднее время жизни нейтрона до его поглощения или утечки [6]. Таким образом, под входом понимается число нейтронов, поступающих в систему (ядерный реактор) от источника нейтронов и при делении нейтронами ядер топлива. Под выходом понимается поглощение или утечка нейтронов. В выражении (7) плотность распределения величины скачков поступающего потока задана в виде дельтавидного распределения, соответствующего распределению числа вторичных нейтронов в одном акте деления ядра. Скачки поступающего потока – это нейтроны, поступающие из делящегося ядра. Тогда из модели (1) - (7) получаем соотношения для числа N мгновенных нейтронов в ядерном реакторе с источником нейтронов q в диффузионном точечном односкоростном приближении [6]

$$\frac{d \langle N \rangle}{dt} = \langle v \rangle [\langle v \rangle \Sigma_f - DB^2 - \Sigma_a] \langle N \rangle + q,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя скорость нейтронов; $\langle v \rangle$ – среднее число вторичных нейтронов на одно деление; Σ_f – макроскопическое сечение деления; Σ_a – макроскопическое сечение поглощения нейтронов; D – коэффициент диффузии нейтронов; B^2 – геометрический лапласиан [6]. Выражение $\lambda_1 \langle v \rangle / b = 1$ соответствует условию критичности $k = 1$, где $\langle v \rangle = -d\varphi_1(\theta)/d\theta|_{\theta=0} / \langle v \rangle \Sigma_f$ – среднее число вторичных нейтронов в одном акте деления ядра, $\langle v \rangle \Sigma_f \langle v \rangle / b = \langle v \rangle \langle v \rangle \Sigma_f l_{ef} = k$ – коэффициент размножения нейтронов [6].

Из уравнения для преобразования Лапласа $F(\theta) = E(\exp\{-\theta N\})$

$$\frac{\partial \ln F}{\partial t} = -\varphi_q(\theta) - [\theta b - \varphi_1(\theta)] \frac{\partial \ln F}{\partial \theta} \quad (8)$$

находим стационарное решение вида

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \theta} = -\frac{\varphi_q(\theta)}{[\theta b - \varphi_1(\theta)]}, \quad \ln F = -\int_0^{\theta} \frac{\varphi_q(\theta) d\theta}{[\theta b - \varphi_1(\theta)]}, \quad (9)$$

и вид нестационарного решения, полученный из результатов работы [7], где по времени интегрируется эффективная функция источника

$$E(\exp\{-\theta N(t)\} | N(0) = N^0) = \exp\{-\theta N^0 \exp\{-bt\}\} - \int_0^t \frac{\varphi_q(\theta e^{bu}) du}{[1 - \varphi_1(\theta e^{bu}) / b\theta e^{bu}]}. \quad (10)$$

Найти явный вид преобразования Лапласа из формулы (9) несложно для значений случайной переменной (числа нейтронов в реакторе), много больших, чем среднее число частиц в одном поступающем «пакете» μ^{-1} и числа случайных нейтронов при делении ядра (1, ..., 7). Это предположение согласуется также с принятым непрерывным описанием, что отличается от обычно употребляемого дискретного описания, соответствующего реальной физической ситуации (не составляет труда перейти к дискретному случаю). Тогда можно разложить в ряд величины $\exp\{-\theta/\mu\}$, $\exp\{-k\theta\}$, ограничившись квадратичными членами разложения, и получить для $F_{st}(\theta)$ выражение

$$F_{st}(\theta) = (1 + \theta k \langle v^2 \rangle / 2(1-k) \langle v \rangle) \frac{2ql \langle v \rangle}{k \langle v^2 \rangle} = \int_0^\infty e^{-\theta x} p_{st}(x) dx; \quad p_{st}(x) = (x-r)^{\alpha-1} \exp\{-(x-r)/c\} c^{-\alpha} / \Gamma(\alpha);$$

$$C = k \langle v^2 \rangle / 2 \langle v \rangle (1-k); \quad \alpha = (2ql \langle v \rangle / k \langle v^2 \rangle) (1 + (1-k) \langle v \rangle / \mu k \langle v^2 \rangle); \quad r = ql \langle v \rangle / \mu k \langle v^2 \rangle$$

(гамма-распределение со сдвинутым аргументом).

Если в разложении по $x\mu^{-1}$ ограничиться одним слагаемым (так как $\mu^{-1} \sim 1 \ll \langle v \rangle \sim 2,4$), то упрощается выражение для $F_{st}(\theta)$, а распределение принимает вид простого гамма-распределения с «урезанными» параметрами:

$$F_{st}(\theta) = (1 + \theta k \langle v^2 \rangle / 2(1-k) \langle v \rangle) \frac{2ql \langle v \rangle}{k \langle v^2 \rangle};$$

$$p_{st}(x) = x^{\alpha-1} \exp\{-x/c\} c^{-\alpha} / \Gamma(\alpha); \quad c = k \langle v^2 \rangle / 2 \langle v \rangle (1-k); \quad \alpha = 2ql \langle v \rangle / k \langle v^2 \rangle. \quad (11)$$

Выражения для моментов случайной величины числа нейтронов N находим из формулы (9):

$$\langle N_{st} \rangle = -\partial \ln F / \partial \theta |_{\theta=0} = ql / (1-k), \quad (12)$$

$$\varphi_0(\theta) = -E(\exp\{-\theta q\}) = \lambda(1 - \exp\{-\theta/\mu\}); \quad \langle q \rangle = \partial \varphi_0(\theta) / \partial \theta |_{\theta=0} = \rho = \lambda/\mu; \quad \partial^2 \varphi_0(\theta) / \partial \theta^2 |_{\theta=0} = -\langle q^2 \rangle = -\rho/\mu;$$

$$\varphi_1(\theta) = -\lambda_1 E(\exp\{-\theta v\}); \quad \lambda_1 \langle v \rangle = \partial \varphi_1(\theta) / \partial \theta |_{\theta=0}; \quad \partial^2 \varphi_1(\theta) / \partial \theta^2 |_{\theta=0} = -\lambda_1 \langle v^2 \rangle;$$

$$D_{st}(N) = \langle N_{st}^2 \rangle - \langle N_{st} \rangle^2 = \frac{\partial^2 \ln F}{\partial \theta^2} |_{\theta=0} = \frac{ql[(1-k) \langle q^2 \rangle + \langle q \rangle + k \langle v^2 \rangle + \langle v \rangle]}{2(1-k)^2}. \quad (13)$$

Сравнивая эту величину с результатом, полученным для дисперсии числа нейтронов в реакторе, например в работе [4], найдем, что величина $\mu^{-1} = [(1-k)(\langle q^2 \rangle / q + 1) + l_{er} \langle v \rangle \Sigma_f \langle v^2 \rangle D_v] / 2$, где $\langle v^2 \rangle D_v = \langle v(v-1) \rangle$, D_v - параметр Дайвена [6], $\langle q^2 \rangle$ - второй момент источника нейтронов, $q = \langle q \rangle$.

Для нестационарного случая используем соотношение (11), с заменой $x = \theta \exp\{-bu\}$,

$$\ln E(\exp\{-\theta N(t)\} | N(0) = N_0) = -\theta N^0 \exp\{-bt\} + \int_0^{\theta \exp\{-bt\}} \frac{\varphi_q(x) dx}{bx[1 - \varphi_1(x) / bx]}. \quad (14)$$

Сами выражения для распределений можно, как в стационарном случае, искать при помощи разложений в ряд значений $\varphi_q(x)$, $\varphi_1(x)$. Для моментов из выражения (14) получаем:

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \theta} = -N^0 e^{-bt} + \left(\frac{\lambda}{b}\right) \left\{ \frac{1 - \exp\{-\theta e^{-bt} / \mu\}}{\theta [1 - \lambda_1 (1 - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \exp\{-\theta k e^{-bt}\}) / b\theta e^{-bt}]} - \frac{1 - \exp\{-\theta / \mu\}}{\theta [1 - \lambda_1 (1 - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \exp\{-\theta k\}) / b\theta]} \right\};$$

$$\langle N(t) \rangle = -\frac{\partial \ln F}{\partial \theta} |_{\theta=0} = N^0 e^{-bt} + \frac{ql}{(1-k)} (1 - e^{-bt});$$

$$DX = E(X^2(t)) - E^2(X(t)) = D_{st}(N)(1 - \exp\{-2bt\}).$$

При $t \rightarrow \infty$ эти величины стремятся к стационарным значениям (12) и (13).

В формуле (7) можно использовать модель выхода $\gamma(x) = a + bx$, когда $V(-\theta, X) = -\varphi_0(\theta) - \theta a(1 - \chi_x) + \theta bX - cX\varphi_1(\theta)$; $\chi_x = 1, x = 0, \chi_x = 0, x > 0$. Тогда вместо уравнения (8) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = [-\varphi_q(\theta) + \theta a - (\theta b - \varphi_1(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta}] F - a\theta P_0(t), \quad P_0(t) = E\{\chi_x\}. \quad (15)$$

В этом случае $\langle q(t) \rangle = \rho - a(1 - P_0(t))$.

3. Точечная модель кинетики нейтронов в реакторе с учетом запаздывающих нейтронов

Введем двухкомпонентный случайный процесс с преобразованием Лапласа вида $F(\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2\}) = E\{\exp\{-\theta_1 N(t) - \theta_2 C(t)\} | N(0) = N^0, C(0) = C^0\}$, где N – случайное число нейтронов в реакторе, C – случайное число ядер-предшественников запаздывающих нейтронов. Запишем уравнение для этого случая, учитывая такие дополнительные слагаемые как вход ядер-предшественников при делении ядер и их выход при радиоактивном распаде

$$\frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial t} = -\varphi_q(\theta_1) + [\lambda_p(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial}{\partial \theta_2} - (\theta_1 b - (1 - \beta)\varphi_1(\theta_1) - \beta\varphi_1(\theta_2)) \frac{\partial}{\partial \theta_1}] \ln F(\vec{\theta}), \quad (16)$$

где λ_p – постоянная распада ядер-предшественников. Для простоты мы рассмотрим одну группу ядер-предшественников и запаздывающих нейтронов. Предположим, что

$$\ln F(\vec{\theta}) = F_1 + F_2, \quad (17)$$

где функции $F_i, i = 1, 2$, могут зависеть и от θ_1 и от θ_2 , но выполняются соотношения

$$-\partial F_1(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_{1|0=0} = \langle N(t) \rangle, \quad -\partial F_2(\theta_1, \theta_2) / \partial \theta_{2|0=0} = \langle C(t) \rangle. \quad (18)$$

Тогда уравнение (17) можно разбить на два уравнения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\varphi_q(\theta_1) + [\lambda_p \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - (\theta_1 b - (1 - \beta)\varphi_1(\theta_1)) \frac{\partial}{\partial \theta_1}] \ln F(\vec{\theta}); \quad (19)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [-\lambda_p \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \beta \varphi_1(\theta_2) \frac{\partial}{\partial \theta_1}] \ln F(\vec{\theta}).$$

Дифференцируя первое уравнение по θ_1 , а второе по θ_2 , получаем при $\vec{\theta} = 0$ известную [6] систему уравнений для средних значений нейтронов и ядер-предшественников:

$$\partial \langle N \rangle / \partial t = q + \lambda_p \langle C \rangle + [k(1 - \beta) - 1] \langle N \rangle / l; \quad \partial \langle C \rangle / \partial t = -\lambda_p \langle C \rangle + \beta k \langle N \rangle / l, \quad (20)$$

Легко. В стационарном случае исключаем $\lambda_p \partial \ln F(\vec{\theta}) / \partial \theta_2$ из второго уравнения (19), подставляем в первое, и получаем, что

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \theta_1} = - \frac{\varphi_q(\theta_1) / \theta_1}{b(1 - \beta)(\varphi_1(\theta_1) / \theta_1) - \beta(\varphi_1(\theta_2) / \theta_2)}; \quad (21)$$

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \theta_2} = \beta(\varphi_1(\theta_2) / \lambda_p \theta_2) \frac{\partial \ln F}{\partial \theta_1}. \quad (22)$$

Так же, как и для случая только мгновенных нейтронов, записываются выражения для стационарных моментов $\langle N(t) \rangle, \langle C(t) \rangle$, дисперсий, совместных моментов нейтронов и ядер-предшественников, а также распределения. Так, распределение для числа нейтронов будет совпадать с (12), но $\langle v^2 \rangle \rightarrow \langle v^2 \rangle (1 - \beta)$, то есть

$$p_{st}(x) = x^{\alpha-1} \exp\{-x/c\} c^{-\alpha} / \Gamma(\alpha); \quad c = \frac{k \langle v^2 \rangle (1-\beta)}{2 \langle v \rangle (1-k)}; \quad \alpha = \frac{2ql \langle v \rangle}{k \langle v^2 \rangle (1-\beta)}. \quad (23)$$

Для нестационарного случая решение записываем в виде:

$$\begin{aligned} \ln E(\exp\{-\theta_1 N(t) - \theta_2 C(t)\} | N(0) = N_0, C(0) = C_0) &= -\theta_1 N^0 \exp\{\omega t\} - \theta_2 C^0 \exp\{\omega t\} + \omega \int_0^t \\ & D(u) du + (\beta \omega / \lambda_p) \int_0^t \frac{\varphi_1(\theta_2 \exp\{\omega u\}) D(u) du}{\theta_1 \exp\{\omega u\}} = -\theta_1 N^0 \exp\{\omega t\} - \theta_2 C^0 \exp\{\omega t\} + \\ & + \int_{g_1}^{\theta_1 \exp\{-\omega t\}} \frac{D(x_1, x_2) dx_1}{x_1} + (\beta / \lambda_p) \int_{g_2}^{\theta_2 \exp\{-\omega t\}} \frac{\varphi_1(x_2) D(x_1, x_2) dx_2}{x_1 x_2}; \quad (24) \\ D(u) &= \frac{\varphi_q(\theta_1 \exp\{\omega u\})}{b[1-(1-\beta)(\varphi_1(\theta_1 \exp\{\omega u\})/b\theta_1 \exp\{\omega u\}) - \beta(\varphi_1(\theta_2 \exp\{\omega u\})/b\theta_2 \exp\{\omega u\})]}; \\ D(x_1, x_2) &= \frac{\varphi_q(x_1)}{b[1-(1-\beta)(\varphi_1(x_1)/bx_1) - \beta(\varphi_1(x_2)/bx_2)]}; \quad x_i = \theta_i \exp\{\omega u\}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где в соответствии с результатами работы [7], кроме источника для числа нейтронов, учитывается и источник для ядер-предшественников. При этом виде решения выполняются условия (17), (18). Из уравнения (24) получаем

$$\langle N \rangle = -\partial \ln F / \partial \theta_{1|0=0} = \frac{ql}{(1-k)} (1 - \exp\{\omega t\}) + N^0 \exp\{\omega t\}; \quad (25)$$

$$\langle C \rangle = -\partial \ln F / \partial \theta_{2|0=0} = (\beta k / \lambda_p) \frac{ql}{(1-k)} (1 - \exp\{\omega t\}) + C^0 \exp\{\omega t\}.$$

А из уравнений (21) и (22) получим

$$\langle N \rangle_{st} = -\partial \ln F / \partial \theta_{1|0=0} = \frac{ql}{(1-k)}; \quad \langle C \rangle_{st} = -\partial \ln F / \partial \theta_{2|0=0} = (\beta k / \lambda_p) \frac{ql}{(1-k)}; \quad (26)$$

$$D_{st}(N) = \langle N_{st}^2 \rangle - \langle N_{st} \rangle^2 = \partial^2 \ln F / \partial \theta_{1|0=0}^2 = \frac{ql}{2(1-k)^2} [(1-k) \langle q^2 \rangle / \langle q \rangle + k(1-\beta) \langle v^2 \rangle / \langle v \rangle].$$

Последнее выражение вторым слагаемым отличается от уравнения (13). Рассчитываются также

$$D_{st}(C) = \langle C_{st}^2 \rangle - \langle C_{st} \rangle^2 = \partial^2 \ln F / \partial \theta_{2|0=0}^2 = (\beta k / \lambda_p) D_{st}(CN) - (k \langle v^2 \rangle \beta / 2 \lambda_p \langle v \rangle) N_{st},$$

$$D_{st}(CN) = \langle CN \rangle_{st} - \langle C \rangle_{st} \langle N \rangle_{st} = \beta ql k \langle v^2 \rangle / \langle v \rangle 2(1-k)^2.$$

К этим стационарным значениям стремятся нестационарные, полученные из формулы (24)

$$\begin{aligned} -\partial \ln F / \partial \theta_1 &= N^0 \exp\{\omega t\} + \exp\{\omega t\} D(\theta_1 \exp\{\omega u\}, \theta_2 \exp\{\omega u\}) - D(\theta_1, \theta_2) + \\ & + (\beta / \lambda_p) \int_{g_2}^{\theta_2 \exp\{-\omega t\}} \varphi_1(x_2) (\partial D(x_1, x_2) / \partial x_1) dx_2 / \theta_2; \end{aligned}$$

второе слагаемое получено с учетом соотношения $\partial x_1 / \partial \theta_1 = \exp\{\omega u\} = x_2 / \theta_2$; производная по θ_2 от второго слагаемого равна нулю, и $\partial^2 \ln F / \partial \theta_1 \partial \theta_{2|0=0} = D(CN) = D_{st}(CN)(1 - \exp\{2\omega t\})$.

Если выражения (25) подставить в уравнения (20), то стационарные значения сократятся (из соответствующих стационарных уравнений), множители $\exp\{\omega t\}$ также сократятся, а для значений ω запишется уравнение обратных часов [6, 8]

$$\omega l + 1 - k + \beta k = k\beta\lambda_p/(\omega + \lambda_p). \quad (27)$$

4. Точечная модель кинетики нейтронов в реакторе с учетом запаздывающих нейтронов и обратной связи по температуре

Выше нами были получены известные результаты (но новыми методами). Рассмотрим теперь простую математическую модель динамической обратной связи по реактивности в гетерогенном реакторе. Как в работе [9], учтем воздействие на коэффициент размножения малых отклонений температуры среды ΔT в линейном приближении

$$k = k_0 + \alpha\Delta T; \quad \Delta T = T - T_s, \quad (28)$$

где T – динамическое (случайное) значение средней температуры реактора в его точечной модели; $T_s = T_0$ – то значение средней стационарной температуры, при которой реактивность обратной связи равна нулю (средняя температура реактора при работе его на постоянной мощности); α – температурный коэффициент реактивности [8, 6, 9]. Ниже будет получена нелинейная модель, которая будет линеаризована. Связь между температурой и числом нейтронов в реакторе запишем в виде [8]

$$dT/dt = K_T(N - N_0) - \gamma(T - T_0), \quad (29)$$

где используется закон охлаждения Ньютона. Параметр K_T – величина, обратная теплоемкости реактора, величине $1/\gamma$ можно придать смысл среднего времени, необходимого для передачи теплоносителю тепла, генерируемого в реакторе, $dT_0/dt = 0$.

Для описания эффектов обратной связи в виде (28) и (29) введем трехкомпонентное преобразование Лапласа $F(\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}) = E(\exp\{-\theta_1 N(t) - \theta_2 C(t) - \theta_3 T(t)\} | N(0) = N^0, C(0) = C^0, T(0) = T^0)$, где N – случайное число нейтронов в реакторе, C – случайное число ядер-предшественников запаздывающих нейтронов. Случайной величиной считаем и величину T . Соответствующая система уравнений для средних значений имеет вид:

$$d\langle N \rangle/dt = (k - 1 - \beta k)\langle N \rangle/l + \lambda_p\langle C \rangle + q; \quad d\langle C \rangle/dt = \beta k\langle N \rangle/l - \lambda_p\langle C \rangle; \quad (30)$$

$$d\langle T \rangle/dt = K_T(\langle N \rangle - \langle N_0 \rangle) - \gamma(\langle T \rangle - T_0).$$

Величину $N_0 = \langle N \rangle_{st}$ считаем неслучайной и рассматриваем ее как среднее значение. Источник для отклонения температуры зададим пропорциональным случайному числу нейтронов и делению ядер. В уравнении для $F(\theta)$ учтем источники для изменения температуры и ее затухание. Получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\vec{\theta})}{\partial t} = & [-\varphi_q(\theta_1) + \lambda_p(\theta_1 - \theta_2)] \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \theta_1 b \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \theta_3 \gamma \frac{\partial}{\partial \theta_3} - \theta_3(\gamma T_0 - K_T N_0)] F(\vec{\theta}) + [(1 - \beta)\varphi_{10}(\theta_1)(1 + d) + \\ & + \beta\varphi_{10}(\theta_2)(1 + d)] \frac{\partial}{\partial \theta_1} F(\vec{\theta}) + K_T l \varphi_{10}(\theta_3) \frac{\partial}{\partial \theta_1} F(\vec{\theta})/k_0; \quad d = \alpha\Delta T/k_0 \rightarrow -\alpha\left(\frac{\partial}{\partial \theta_3} + T_0\right)/k_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где коэффициент размножения k_0 , как и множитель при φ_{10} (индекс $_0$ указывает, что эта функция задана при T_0), не зависят от $T - T_0$ (28). Так как величина $d \sim T - T_0 \rightarrow -\partial/\partial\theta_3$, то уравнение (31) содержит нелинейные слагаемые с производными вида $d\partial/\partial t$, $d\partial/\partial\theta_i$, $i = 1, 2, 3$. Чтобы упростить задачу (в принципе ее можно решать и в таком нелинейном виде, но решение будет громоздким), заменим в этих слагаемых величину $d = -k^{-1}_0\alpha(\partial/\partial\theta_3 + T_0)$ на среднее значение $\langle d \rangle = k^{-1}_0\alpha(\langle T \rangle - \langle T_0 \rangle)$. Разделив полученное линеаризованное уравнение на $F(\vec{\theta})$, получим уравнение для $\ln F(\vec{\theta})$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln F}{\partial t} = & -\varphi_q(\theta_1) + K_T N_0 \theta_3 - \theta_3 \gamma T_0 + [\lambda_p(\theta_1 - \theta_2)] \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \theta_1 b \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \theta_3 \gamma \frac{\partial}{\partial \theta_3}] \ln F(\vec{\theta}) + [((1 - \beta)\varphi_{10}(\theta_1) + \\ & + \beta\varphi_{10}(\theta_2))(1 + \langle d \rangle) + K_T l \varphi_{10}(\theta_3)/k_0] \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln F(\vec{\theta}). \end{aligned} \quad (32)$$

Предположим теперь, что выполняются условия, аналогичные (17) и (18) для трехкомпонентного случая и разобьем уравнение (32) на три уравнения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\varphi_q(\theta_1) + [\lambda_p \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - (\theta_1 b - (1 - \beta)\varphi_{10}(\theta_1)(1 + \langle d \rangle)) \frac{\partial}{\partial \theta_1}] \ln F(\vec{\theta}); \quad (33)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = [-\lambda_p \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \beta \varphi_{10}(\theta_2)(1 + \langle d \rangle) \frac{\partial}{\partial \theta_1}] \ln F(\vec{\theta});$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} = (K_T l \varphi_{10}(\theta_3)/k_0) \frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_1} - \theta_3 \gamma \frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_3} + (K_T N_0 - \gamma T_0) \theta_3.$$

Продифференцировав первое уравнение по θ_1 , второе – по θ_2 , а третье – по θ_3 и положив в результате $\theta = 0$, получим с учетом $\partial \varphi_1(\theta)/\partial \theta|_{\theta=0} = k_0$, уравнения для средних значений (30).

В стационарном случае из формулы (33) получаем

$$\frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_3} = (K_T l \varphi_{10}(\theta_3)/k_0 \gamma \theta_3) \frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_1} + (K_T N_0 / \gamma - T_0); \quad (34)$$

$$\frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_2} = (\beta \varphi_{10}(\theta_2)(1 + \langle d \rangle) / \lambda_p \theta_2) \frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_1};$$

$$\frac{\partial \ln F(\vec{\theta})}{\partial \theta_1} = \frac{-\varphi_q(\theta_1)/b\theta_1}{[1 - \beta \varphi_{10}(\theta_2)(1 + \langle d \rangle) / b\theta_2 - (1 - \beta)\varphi_1(\theta_1)(1 + \langle d \rangle) / b\theta_1]}; \quad \langle N_{st} \rangle = ql / (1 - k_0).$$

В нестационарном случае

$$\begin{aligned} \ln E(\exp\{-\theta_1 N(t) - \theta_2 C(t) - \theta_3 T\} | N(0) = N^0, C(0) = C^0, T(0) = T^0) = & -\theta_1 N^0 \exp\{\omega t\} - \theta_2 C^0 \exp\{\omega t\} - \\ & \theta_3 T^0 \exp\{\omega t\} + \omega \int_0^t D(x_1, x_2, x_3) du / b + (\beta(1 + \langle d \rangle) \omega / \lambda_p) \int_0^t \varphi_{10}(x_2) D(x_1, x_2, x_3) du / b x_1 + \\ & \omega \int_0^t [(K_T l / \gamma k_0) \varphi_{10}(x_3) D(x_1, x_2, x_3) / b x_1 - x_3 K_T N_0 / \gamma + x_3 T_0] du = -\theta_1 N^0 \exp\{\omega t\} - \theta_2 C^0 \exp\{\omega t\} - \\ & \theta_3 T^0 \exp\{\omega t\} + \int_{\theta_1}^{\theta_1 \exp\{-\omega t\}} D(x_1, x_2, x_3) dx_1 / b x_1 + (\beta(1 + \langle d \rangle) / \lambda_p) \int_{\theta_2}^{\theta_2 \exp\{-\omega t\}} \varphi_{10}(x_2) D(x_1, x_2, x_3) dx_2 / b x_1 x_2 + \\ & \int_{\theta_3}^{\theta_3 \exp\{-\omega t\}} [(K_T l / \gamma k_0) \varphi_{10}(x_3) D(x_1, x_2, x_3) / b x_1 - x_3 K_T N_0 / \gamma + x_3 T_0] dx_3 / x_3; \quad (35) \end{aligned}$$

$$D(x_1, x_2, x_3) = \frac{\varphi_q(x_1)}{[1 - (1 - \beta)(\varphi_1(x_1)(1 + \langle d \rangle) / b x_1) - \beta(\varphi_{10}(x_2)(1 + \langle d \rangle) / b x_2)]}; \quad x_i = \theta_i \exp\{\omega t\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Решение в виде (35) удовлетворяет принятым условиям (17) и (18). Из формулы (35) получаем

$$\langle N \rangle = -\partial \ln F / \partial \theta_1|_{\theta=0} = \langle N_t \rangle (1 - \exp\{\omega t\}) + N^0 \exp\{\omega t\}; \quad \langle N_t \rangle = ql / (1 - k_0 - \alpha \langle \Delta T \rangle); \quad (36)$$

$$\langle C \rangle = -\partial \ln F / \partial \theta_2|_{\theta=0} = (\beta k / l \lambda_p) \langle N_t \rangle (1 - \exp\{\omega t\}) + C^0 \exp\{\omega t\};$$

$$\langle T \rangle = T_t (1 - \exp\{\omega t\}) + T_1 \exp\{\omega t\}; \quad T_1 = T^0 - T_t; \quad T_t = (K_T / \gamma) (\langle N_t \rangle - N_0) + T_0.$$

Получены также выражения для дисперсий и различных корреляций, которые не приводятся здесь. Если выражения (36) подставить в систему уравнений (30) и выделить в ней стационарные и нестационарные части, а коэффициент размножения записать в виде $k = k_0 + \alpha\Delta T$, то после предположения о том, что начальные значения N^0, C^0 лежат поблизости от соответствующих стационарных значений этих величин, и значения $N_1 = N^0 - \langle N \rangle, C_1 = C^0 - \langle C \rangle, T_1$ малы (мы пренебрегаем произведением этих величин), получим обобщение уравнения обратных часов в виде

$$(\omega + 1) = k[(1 - \beta) + \beta\lambda_p/(\omega + \lambda_p)]; \quad k = k_0 + \alpha K_T N_0/(\gamma + \omega). \quad (37)$$

Эффективный коэффициент размножения k , как видно из формулы (37), изменяется за счет добавки, связанной с влиянием температурной обратной связи. Эта добавка зависит от временной постоянной ω , которая определяется из решения алгебраического уравнения (37).

Подставляя полученное значение $\langle N(t) \rangle$ в $\langle \Delta T \rangle = \Delta T^0 \exp\{\omega t\} + K_T(1 - \exp\{\omega t\})[\langle N \rangle - N_0]/\gamma$, получаем квадратное уравнение для $\langle d \rangle = \alpha \langle \Delta T \rangle / k_0$ вида $a\langle d \rangle^2 + b\langle d \rangle + c = 0$; $a = k_0^2/\alpha$; $b = k_0[1 - (1 - k_0)/\alpha - (\Delta T^0 + K_T N_0/\gamma)\exp\{\omega t\} + K_T N_0/\gamma]$; $c = (1 - k_0)\Delta T^0 \exp\{\omega t\}$. Решение этого уравнения

$$\langle d \rangle = (\alpha/2k_0^2) \{ -b - \{k_0^2[(1 - k_0)/\alpha + (\Delta T^0 + K_T N_0/\gamma)\exp\{\omega t\} - K_T N_0/\gamma]^2 - 4\Delta T^0 \exp\{\omega t\}(1 - k_0)k_0^2/\alpha\}^{1/2} \};$$

при $t \rightarrow \infty, \langle \Delta T \rangle \rightarrow 0$; при $t = 0, \langle \Delta T \rangle = \Delta T^0$.

Полагая в уравнении (35) $\theta_1 = \theta_2 = 0$, найдем преобразование Лапласа для T

$$\ln F_T(\theta_3 = \theta) = -\theta T^0 \exp\{\omega t\} - (-\omega) \int_0^t [(K_T/\gamma \langle v \rangle) \varphi_{10}(x_3) \langle N \rangle - \theta \exp\{\omega t\} K_T/\gamma N_0 + \theta \exp\{\omega t\} T_0] du. \quad (38)$$

Таким образом, получено вероятностное описание случайной величины температуры реактора.

5. Момент достижения положительного уровня для случайного процесса изменения коэффициента размножения

Свяжем функцию φ_{10} в уравнениях (7), (8) и (38) с кумулянтной обобщенного пуассоновского процесса [11]

$$K(s) = a \int_0^\infty (\exp\{-sx\} - 1) \Pi\{dx\} + a_1 s, \quad (39)$$

которая для более общего случая однородного процесса с независимыми приращениями $\xi(t)$ (обобщенный пуассоновский процесс – частный случай) выражается через преобразование Лапласа процесса в виде соотношения [10]

$$M(\exp\{-s\xi(t)\}) = \exp\{t(a_1 s + a \int_0^\infty (\exp\{-sx\} - 1) \Pi\{dx\})\} = \exp\{tK(s)\}. \quad (40)$$

Перепишем в уравнении (38)

$$-sT^0 \exp\{\omega t\} = -sT^0 \omega t (\exp\{\omega t\} - 1)/\omega t - sT^0 = \langle s \rangle T^0 (-\omega) t - sT^0; \quad \langle s \rangle = s(\exp\{\omega t\} - 1)/\omega t = st^{-1} \int_0^t \exp\{\omega u\} du.$$

Умножив и разделив формулу (38) на t , получаем

$$\ln F_T(\theta) = -\theta T^0 + t \langle K(\langle \theta \rangle) \rangle; \quad \langle K(\langle \theta \rangle) \rangle = \int_0^t K(\theta, u) du / t$$

– усреднение на интервале $(0, t)$ значения кумулянты обобщенного пуассоновского процесса со сносом

$$\langle K(\langle \theta \rangle) \rangle = \langle \theta \rangle (-\omega) (T^0 + K_T N_0/\gamma - T_0) + (-\omega) (K_T N_0/\gamma \langle v \rangle) \int_0^\infty (\exp\{-\langle \theta \rangle x\} - 1) \Pi\{dx\}; \quad k - k_0 = \alpha \Delta T.$$

Сравнивая с формулой (39), получаем, что

$$A = (-\omega)(K_T/\gamma\langle v \rangle)(\langle N_t \rangle); \quad a_1 = (-\omega)(K_T N_0/\gamma + \Delta T^0); \quad \Delta T^0 = T^0 - T_0; \quad \Pi\{dx\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(x - k)\pi_k dx.$$

Мы получили преобразование Лапласа $F_T = \int_0^{\infty} \exp\{-sx\} p_{\Delta T}(x) dx$ для распределения $p_{\Delta T}(x)$ температуры $x = T$. Перейдем от случайной величины T к случайной величине $\Delta k = k - k_0 = \alpha \Delta T = x$ (28) – отклонению коэффициента размножения нейтронов k от его стационарного значения k_0 при стационарной температуре T_0 . Переход к $\Delta k = k - k_0 = \alpha \Delta T$ приводит к распределению $p_{\Delta k}(y) = p_{\Delta T}(y/\alpha)/\alpha$ для Δk , его преобразование Лапласа равно

$$F_{\Delta k}(s) = \int_0^{\infty} \exp\{-sy\} p_{\Delta k}(y) dy = \int_0^{\infty} \exp\{-sy\} (p_T(y/\alpha)/\alpha) dy = \int_0^{\infty} \exp\{-\alpha s(y/\alpha)\} (p_T(y/\alpha)/\alpha) dy = F_T(\alpha s) \exp\{\alpha s T_0\} = \exp\{-\alpha s \Delta T^0 + tK(\alpha\langle s \rangle)\}; \quad F_{\Delta k}(\theta) = F_T(\alpha s) \exp\{\alpha s T_0\}. \quad (41)$$

Выражение (41) дает вероятностную характеристику реактивности реактора, которая рассматривается как случайная величина. Выражение (41) представляет собой суперпозицию распределений с кумулянтной $t\langle K(\langle \theta \rangle) \rangle$ и $-\alpha \theta \Delta T^0$. Последнее не зависит от времени и дает дельтавидное распределение со средним ΔT^0 , свертка которого с $p_T(y)$ дает сдвиг последнего на ΔT^0 . Поэтому рассматриваем граничные задачи поведения различных функционалов при достижении границы процессом с независимыми приращениями вида (40).

Из уравнений (40) и (41) находим

$$t^{-1} \ln M \exp(-\alpha s \xi(t)) = a_1 \alpha s + a \int_0^{\infty} (\exp\{-\alpha s x\} - 1) \Pi\{dx\}; \quad \xi(t) = T; \quad (42)$$

$$t^{-1} M \xi(t) = -\partial t^{-1} \ln M \exp(-\alpha s \xi(t)) / \partial (\alpha s) |_{s=0} = a \langle v \rangle - a_1; \quad \alpha t^{-1} M \xi(t) = \alpha (a \langle v \rangle - a_1) |_{t=1} = \alpha M \xi(1);$$

$$M \chi_1(1) = t^{-1} M \Delta k(t) |_{t=1} = \alpha (a \langle v \rangle - a_1) = \partial K(\alpha s) / \partial s |_{s=0} = \alpha (-\omega) [(K_T/\gamma)(\langle N_t \rangle - N_0) - \Delta T^0].$$

Используем результаты работы [11]. Случайный процесс с кумулянтной $K(s)$ (42) описывается сложным пуассоновским процессом, для которого в работе [11] получены выражения для различных граничных функционалов от траекторий процесса. В сложном пуассоновском процессе $\chi_1(t) = \chi(t) - a_1 t = \sum_{k=1}^{v_t} \xi_k - a_1 t$, $t \geq 0$, ξ_k – величина скачков процесса с функцией распределения $F(x) = P\{\xi_k \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \chi_{k \leq x}$, $\chi_{k \leq x} = 1$, $k \leq x$, $\chi_{k \leq x} = 0$, $k > x$, a – параметр экстенсивного распределения интервала между скачками процесса v_t – простейшего пуассоновского процесса, то есть интервал между скачками процесса $\chi_1(t)$ – случайная величина ϕ_k с показательным распределением $P\{\phi_k > t\} = \exp\{-at\}$. Вероятность случайной величины $\langle \chi \rangle = \sup_{t \geq 0} \chi_1(t)$, максимума пуассоновского процесса, равна

$$P\{\sup_{t \geq 0} \chi_1(t) \leq x\} = -M \chi_1(1) R(x) = 1 - R \exp\{s_0 x\} - V(x),$$

где $R(x)$ – потенциал процесса [11], s_0 – ненулевой корень уравнения

$$K(s_0) = 0$$

($s_0 > 0$ при $M \chi_1(1) > 0$, $s_0 < 0$ при $M \chi_1(1) < 0$); для погранслоя $V(x)$ в [11] записаны преобразования Лапласа; выражение для R также дано в [11].

Важной характеристикой случайного процесса и описываемой этим процессом стохастической системы является время достижения положительного уровня $x > 0$. Введем событие первого момента достижения уровня

$$\tau^x = \inf\{t > 0: \chi_1(t) \geq x\}. \quad (43)$$

Для производящей функции момента достижения положительного уровня x процессом $\chi_1(t)$ в [11] получено представление при $\text{Re}\lambda \geq 0$

$$\text{Mexp}\{-\lambda \tau^x\} = 1 - \lambda [R_\lambda(x) s^{-1}(\lambda) - \int_0^x R_\lambda(y) dy], \quad (44)$$

где $s(\lambda)$ – корень уравнения $K(s(\lambda)) = \lambda$, $\lambda \geq 0$, $R_\lambda(x)$ – резольвента процесса на полуоси $x \geq 0$,

$$R_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R^{(n+1)*}(x), \quad x \geq 0, \quad R^{(n+1)*}(x) = \int_0^x R^{n*}(x-y) R(y) dy, \quad n \geq 1.$$

При $M\chi_1(1) > 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +0} s(\lambda) = s(+0) = s_0 > 0$; при $M\chi_1(1) \leq 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow +0} s(\lambda) = 0$. Поэтому вид выражения (44) зависит от того, будет ли $M\chi_1(1) > 0$ – положительное течение или $M\chi_1(1) \leq 0$ – отрицательное течение.

Решение уравнения $K(s_0) = 0$ будем искать, разлагая в ряд экспоненту $\exp\{-s_0 x\} = 1 - s_0 x + (s_0 x)^2/2 - \dots$, и ограничиваясь в этом разложении квадратичным слагаемым. Тогда

$$s_0 \approx \frac{2 \langle v \rangle [(K_T/\gamma) (\langle N_t \rangle - N_0) - \Delta T_0]}{\langle v^2 \rangle (K_T \langle N_t \rangle / \gamma)} = \frac{2(a \langle v \rangle - a_1)}{a \langle v^2 \rangle} = \frac{2M\chi_1(1)}{\alpha a \langle v^2 \rangle}.$$

Учет еще одного слагаемого дает $s_0 \approx (3 \langle v^2 \rangle / 2 \langle v^3 \rangle) [1 - (1 - 8 \langle v^3 \rangle M\chi_1(1) / 3 (\langle v^2 \rangle)^2 \alpha a)^{1/2}]$.

В уравнении $K(s(\lambda)) = \lambda$ также разлагаем в ряд левую часть. Если в разложении ограничиться первым слагаемым, то

$$s(\lambda) \approx \frac{\lambda}{a \langle v \rangle - a_1} = \frac{\alpha \lambda}{M\chi_1}. \quad (45)$$

При учете квадратичного члена в разложении $s(\lambda) \approx [(a \langle v \rangle - a_1) / a \langle v^2 \rangle] [1 + (-) (1 + 2\lambda a \langle v^2 \rangle / (a \langle v \rangle - a_1))^{1/2}]$. Выражение для вероятности того, что время достижения уровня x бесконечно велико, получено в работе [11] в виде $P\{\tau^x = \infty\} = 1 - R \exp\{s_0 x\} - V(x)$, где функция $V(x)$ ищется из интегрального уравнения

$$V(x) + \int_0^x V(y) (dG(x-y)/dx) dy = (1 - R)G(x) + R s_0 \int_x^\infty \exp\{s_0(x-y)\} G(y) dy; \quad G(x) = \\ = (a/a_1 s_0) \int_x^\infty [1 - \exp\{s_0(x-y)\}] \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \delta(y-k) dy = (a/a_1 s_0) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \chi_{k \geq x} - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e^{s_0(x-k)} \chi_{k \geq x} \right];$$

$$R = g(0)/g(s_0); \quad g(s) = \int_0^\infty (\exp\{-sx\}) G(x) dx; \quad g(s) = \int_0^\infty \exp\{-sx\} G(x) dx;$$

$$V(x) = (a/a_1 s_0) \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \chi_{k \geq x} [1 - \exp\{-s_0(x-k)\} (1 + R s_0(k-x))].$$

Если рассматривать случай, когда $0 < x = k - k_0 < 1$, то

$$V(x) = (a/a_1 s_0) \{1 - \pi_0 - \exp\{s_0 x\} [(1 - \pi_0 - s_0 a/a_1) (1 - R s_0 x) + R s_0 \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k k \exp\{-s_0 k\}]\}.$$

$$R = \frac{\langle v \rangle a - a_1}{a_1 [1 - (a/a_1) \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \exp\{-s_0 k\}]};$$

В случае, когда $0 < x = k - k_0 < 1$, получаем, что при $M\chi_1(1) \leq 0$,

$$M\tau^x = (M\chi_1(1))^{-1} \left\{ \frac{\langle v^2 \rangle}{2(\langle v \rangle - a_1/a)} [A + B \exp\{s_0 x\} + C x \exp\{s_0 x\}] + A(1-A)x + C(1-2A)(1/s_0) \right. \quad (46)$$

$$\left. [\exp\{s_0 x\}(x - 1/s_0) + 1/s_0] + B(1 - 2A)(1/s_0)(\exp\{s_0 x\} - 1) - B^2 x \exp\{s_0 x\} - BCx^2 \exp\{s_0 x\}/2 - C^2 x^3 \exp\{s_0 x\}/6 \right\};$$

$$A = 1 - (a/a_1 s_0)(1 - \pi_0) = L/s_0; \quad L = s_0 - d(1 - \pi_0); \quad d = a/a_1;$$

$$B = -R + (d/s_0)(1 - \pi_0) - 1 + RMd = R(Md-1)-L/s_0;$$

$$C = -(a/a_1 s_0)R s_0(1 - \pi_0 - s_0 a_1/a); \quad M = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k k \exp\{-s_0 k\}.$$

Получены также выражения для $M\tau^x$ при $m < x < (m + 1)$, $0 < m \leq 7$, и при $x > 7$. Так, для больших $x \geq 7$, $V = 0$. При $M\chi_1(1) \leq 0$

$$M\tau^x = (M\chi_1(1))^{-1} \left[\frac{\alpha a \langle v^2 \rangle}{2M\chi^{(1)}(1)} - R/s_0 + R \exp\{s_0 x\}(1/s_0 - \frac{\alpha a \langle v^2 \rangle}{2M\chi^{(1)}(1)} - R^2 x \exp\{s_0 x\}] \right],$$

при $M\chi_1(1) > 0$,

$$M\tau^x = (M\chi_1(1))^{-1} (x + R/s_0 - R/s_0).$$

При $0 < x = k - k_0 < 1$ и при $M\chi_1(1) > 0$ – положительное течение,

$$M\tau^x = -(M\chi_1(1))^{-1} [s_0^{-1}(A + B - C/s_0) + \exp\{s_0 x\}C/s_0^2 - Ax]. \quad (47)$$

Можно иначе записать величину $K(s)$. Для этого проведем в явном виде интегрирование по времени в выражении $\int_0^t \langle N_u \rangle du/t$; $\int_0^t \langle N_u \rangle du/t = N_0 D$,

$$D = c^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{(2b/p)(p-b-1)}{1+b-2b/p-(1+b)(b/p)^2} \right] \ln \left| \frac{g^2 - \alpha(2+b)g/2(1-k_0) + (1+b)/8p^2(\Delta T^0)^2}{g_0^2 - \alpha(2+b)g_0/2(1-k_0) + (1+b)/8p^2(\Delta T^0)^2} \right| + \right. \quad (48)$$

$$\left. + \frac{(b/p)(p-b-1)}{1+b-2b/p-(1+b)(b/p)^2} \ln \frac{(1+g)^2}{(1+g_0)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{2+b}{b} - \frac{2p}{b(p-b)} \right] \right\},$$

$$+ \frac{(p-b-1)(2b/p)(p-b-2)}{(b-p)(1+b-2b/p-(1+b)(b/p)^2)} \ln \left| \frac{[2g - \alpha(2+b)/2(1-k_0) + b/p\Delta T^0][2g_0 - \alpha(2+b)/2(1-k_0) - b/p\Delta T^0]}{[2g_0 - \alpha(2+b)/2(1-k_0) + b/p\Delta T^0][2g - \alpha(2+b)/2(1-k_0) - b/p\Delta T^0]} \right| \Big\},$$

$$g^{-1} = \exp\{c\}(\Delta T^0 + k_T N_0/\gamma) + (1 - k_0)/\alpha - k_T N_0/\gamma - [(\exp\{ct\}(\Delta T^0 + k_T N_0/\gamma) + (1 - k_0)/\alpha - k_T N_0/\gamma)^2 - \exp\{c\}4(1 - k_0)/\alpha\Delta T^0]^{1/2}; \quad c = \omega t; \quad g_0 = 1/2\Delta T^0; \quad b = (k_T N_0/\gamma)/\Delta T^0; \quad p = (1 - k_0)/\alpha\Delta T^0.$$

Оценки показывают, что величина D не зависит от времени в интересующем нас временном диапазоне. Тогда выражения (40) - (47) несколько изменяются и

$$K(\theta) = a_1 \theta + a \int_0^{\infty} (\exp\{-\theta x\} - 1) \Pi \{dx\}; \quad a = (-\omega)(K_T/\gamma \langle v \rangle) N_0 D; \quad a_1 = (-\omega)(K_T N_0/\gamma + \Delta T^0); \quad (49)$$

$$\Pi \{dx\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(x - k) \pi_k dx; \quad M\chi_1(1) = t^{-1} M \Delta k(t)|_{t=1} = \alpha(a \langle v \rangle - a_1) = \alpha(-\omega)(K_T N_0/\gamma)(D - 1 - \Delta T^0/(K_T N_0/\gamma)); \quad d =$$

$$a/a_1 = \frac{D}{\langle v \rangle \left(1 + \frac{\Delta T^0}{K_T N_0 / \gamma}\right)}; \quad s_0 \approx \frac{2 \langle v \rangle (D - 1 - \Delta T^0 / (K_T N_0 / \gamma))}{\langle v^2 \rangle > D}.$$

Кроме момента достижения положительного уровня определяются величины перескока уровня, времена пребывания над уровнем, значения процесса в момент достижения уровня, экстремальные значения этих процессов, и другие вероятностные функционалы от рассматриваемого случайного процесса [10, 11, 12]. Отметим, что полученные результаты не совсем точно отражают реальное поведение реакторов, так как в них не учитываются эффекты управления, которые будут существенно изменять времена достижения уровней реактивности.

Другие особенности поведения нейтронов в реакторе, такие как учет более сложных обратных связей, эффектов управления и т.д., также описываются при помощи усложнения рассмотренной модели хранения.

На рис. 1 - 4 показаны различные примеры поведения среднего времени достижения (в сек.) случайной величины $x = k - k_0$. Показаны масштабы изменения $x = k - k_0$ от 0 до 1; 0,1; 0,01. Примеры приводятся как для случая положительного течения процесса, когда $M\chi_1(1) > 0$, так и для случая отрицательного течения при $M\chi_1(1) \leq 0$.

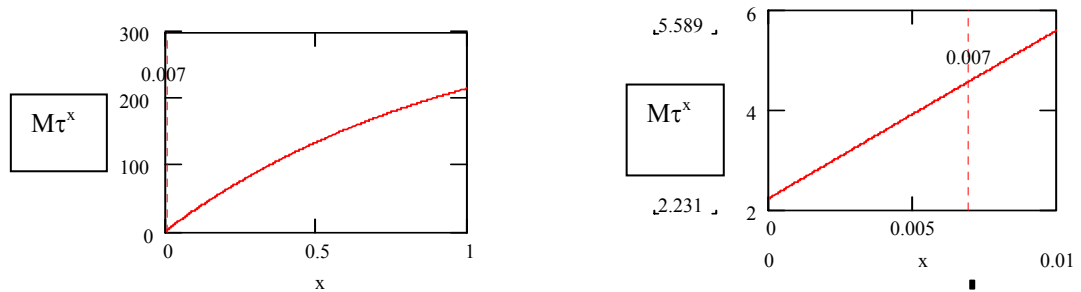


Рис. 1. Зависимость $M\tau^x$ от $x = k - k_0$ при $M\tau^{x=0} = 2,231$, $M\tau^x(x = 0,007) = 4,585$. Расчет по выражению (46) при $M\chi_1(1) \leq 0$. Параметры равны: $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-4}$, $\Delta T^0 = 10$, $1 - k_0 = -0,737 \cdot 10^{-4}$, $M\chi_1(1) = -0,659$, $s_0 = -0,997$, $d = 0,402$, $L = -1,386$, $M = 80,284$, $R = 2,378 \cdot 10^{-4}$. Значение $x = 0,007 \approx \beta$ (доля запаздывающих нейтронов) соответствует скачку на мгновенных нейтронах [8].

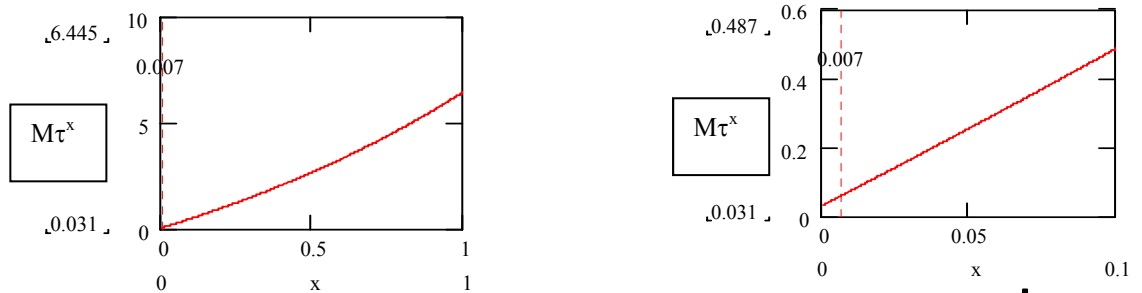


Рис. 2. Зависимость $M\tau^x$ от $x = k - k_0$ при $M\tau^{x=0} = 0,376$, $M\tau^x(x = 0,007) = 0,411$. Расчет по выражению (46) при $M\chi_1(1) > 0$. Параметры равны: $\alpha = -1,6 \cdot 10^{-4}$, $\Delta T^0 = -10$, $1 - k_0 = 1,315 \cdot 10^{-4}$; $M\chi_1(1) = 9,9$; $s_0 = 0,79$; $d = 5,6$; $L = 6,203$; $M = 0,326$; $R = -5,248$.

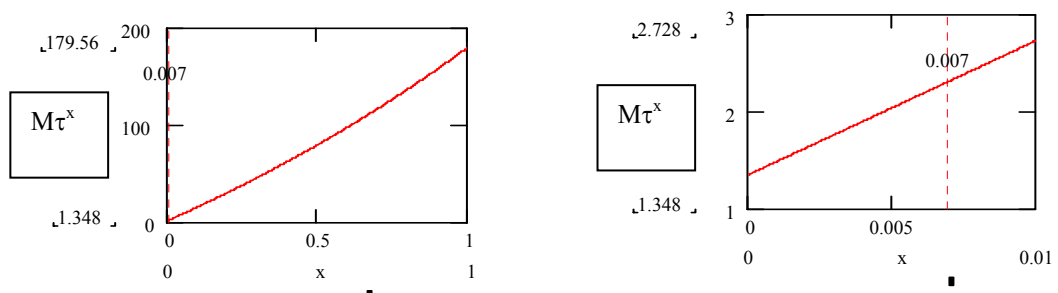


Рис. 3. Зависимость среднего времени достижения $M\tau^x$ уровня $x = k - k_0$ от x при $M\tau^x(x = 0,007) = 2,313$, $M\tau^x(x = 0) = 1,348$ для случая положительного течения для значений $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$; $\Delta T^0 = 10$; $1 - k_0 = 1,1 \cdot 10^{-3}$ и $M\chi_1(1) = 4,229$. Расчет по выражениям (47), (48) и (49).

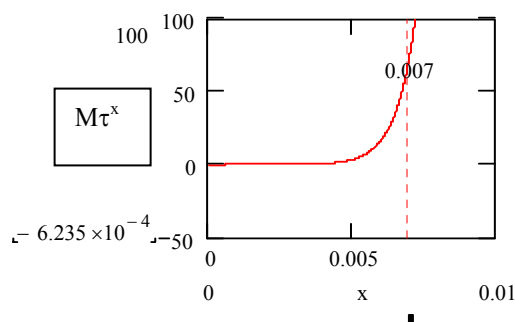


Рис. 4. Зависимость среднего времени достижения Mt^x уровня $x = k - k_0$ от x при когда $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$; $\Delta T^0 = 20$; $1 - k_0 = -1,9 \cdot 10^{-5}$ и $M\chi_1(1) = -1,501$, $Mt^x(x = 0,007) = 74,224$ для случая отрицательного течения. Расчет по выражениям (46), (48) и (49).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанов В.В., Шпырко С.Г. Стохастическое моделирование физических процессов в ядерном реакторе // 36. наук. праць Ін-ту ядерних досл. - 1999. - С. 149 - 151.
2. Shpyrko S.G., Ryazanov V.V. Stochastic storage model and noise-induced phase transitions // Eur. Phys. J. B. - 2006. - Vol. 54. - P. 345 - 354; cond-mat/0510781.
3. Севастьянов В.А. Ветвящиеся процессы. - М.: Наука, 1971. - 436 с.
4. Дорогов В.И., Чистяков В.П. Вероятностные модели превращения частиц. - М.: Наука, 1988. - 110 с.
5. Прабху Н. Стохастические процессы теории запасов. - М.: Мир, 1984. - 185 с.
6. Zweifel P.F. Reactor Physics. - New York: McGraw-Hill, 1973. - 361 p.
7. Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. - К.: Вища шк., 1987. - 247 с.
8. Хетрик Д. Динамика ядерных реакторов. - М.: Атомиздат, 1975.- 400 с.
9. Торлин Б.З. Пространственная устойчивость реактора с регуляторами // Динамика ядерных реакторов. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - С. 283 - 347.
10. Скороход А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями. - М.: Наука, 1986. - 324 с.
11. Корольюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. - К.: Наук. Думка, 1975. - 138 с.
12. Братийчук Н.С., Гусак Д.В. Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. - К.: Наук. Думка, 1990. - 264 с.

STOCHASTIC MODELING OF NEUTRON PROCESSES IN NUCLEAR REACTOR AND INFLUENCE OF TEMPERATURE FEEDBACKS ON POSSIBILITIES OF EMERGENCY DEVELOPMENT

V. V. Ryazanov, S. G. Shpyrko

In works [1,2] generalization of classical stochastic model of storage has been lead. The special case of such generalization with the additional function of an input connected with a source of neutrons at nuclear fission, enables to describe behaviour of neutron processes in a nuclear reactor. Correlations for system of prompt neutrons, and also for neutrons and of delayed neutrons precursors are received at the account of a feedback on temperature. Advantages of the offered approach in comparison with traditional descriptions consist in an opportunity of the detailed and full description of feedback (for example, temperature) and effects of management. So, for a case of a temperature feedback are received time before achievement of the fixed level, value of process during the moment of achievement of a level. Others are defined also likelihood functionals: probabilities of achievement by process of some set levels (for example, probabilities of that reactivity will not exceed a fractional yield of delayed neutrons for fission neutron and there will be no prompt critical of a reactor on prompt neutrons alone), time of stay of process above a level, extreme values of process, the moment of achievement of extreme value, the moment of the first achievement of a level, etc.

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЙТРОННИХ ПРОЦЕСІВ У ЯДЕРНОМУ РЕАКТОРІ ТА ВПЛИВ ТЕМПЕРАТУРНИХ ОБЕРНЕНИХ ЗВ'ЯЗКІВ НА МОЖЛИВОСТІ РОЗВИТКУ АВАРІЙНИХ СИТУАЦІЙ

В. В. Рязанов, С. Г. Шпырко

У роботах [1, 2] було проведено узагальнення класичної стохастичної моделі збереження. Окремий випадок такого узагальнення з додатковою функцією входу, що пов'язана з джерелом нейтронів при поділу ядер, дає можливість описувати поведінку нейтронних процесів у ядерному реакторі. Отримані співвідношення для системи миттєвих нейтронів, та також для нейтронів та ядер-попередників нейтронів, що запізнюються, з

врахуванням оберненого зв'язку по температурі. Переваги підходу, що пропонується, в порівнянні з традиційними методами опису, полягають у можливості повного опису обернених зв'язків (наприклад, температурних) та ефектів керування. Для випадку температурного оберненого зв'язку отримано час до досягнення фіксованого рівня, значення процесу у момент досягнення рівня. Визначаються також інші ймовірносні функціонали: ймовірності досягнення процесом деяких заданих рівнів (наприклад, ймовірності того, що реактивність не перевищить долю нейтронів, що запізнюються, й не відбудеться розгін реактору на миттєвих нейтронах), час перебування процесу над рівнем, екстремальні значення процесу, момент досягнення екстремального значення, момент першого досягнення рівня, тощо.