

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ВИНДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ СПЕКТРОМЕТРЕ

А. М. Соколов

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина

Метод определения импульса заряженной частицы по измерениям ее траектории в магнитном поле спектрометра, описанный в [1], оказался удобным и достаточно часто используется [2, 3]. В работе [1] был предложен и способ реализации указанного метода. Его характерная особенность – применение полиномов Чебышева для приближенного представления зависимостей. В настоящей работе предлагается простой и наглядный подход, который использует полилинейную интерполяцию [4]. Для оценки двух алгоритмов было проведено их тестирование в модельных условиях.

1. Метод Винда и традиционный подход

Идея метода, предложенного Виндом и его соавторами для определения импульса заряженной частицы по измерениям ее траектории в магнитном поле спектрометра [1], состоит в следующем: сначала рассчитывается набор возможных траекторий частиц, проходящих через магнитное поле, и определяются углы вылета частиц для выбранных наборов параметров (в том числе и для значений импульса), а затем строится функция, выражающая импульс через наблюдаемые величины (в том числе через угол вылета). Именно эта функция используется в ходе эксперимента для определения импульса.

Схематично условия эксперимента изображены на рис. 1, на котором переменные x_1, x_2, x_3, x_4 – наблюдаемые характеристики частицы на входе, до попадания в магнитное поле (координаты двух точек в двух плоскостях), x_5 – импульс P , x_6 – угол поворота D .

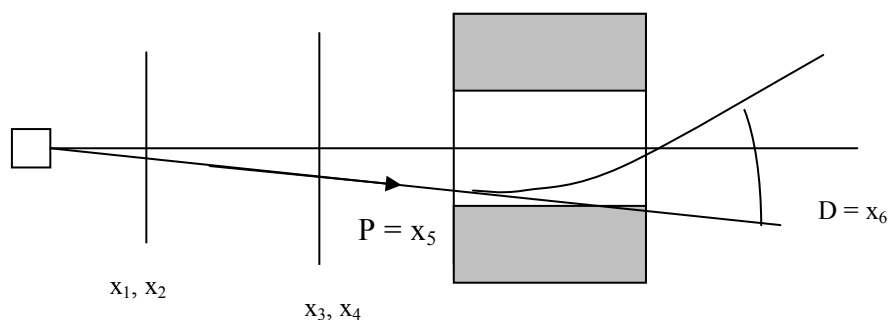


Рис. 1. Схема движения заряженной частицы в магнитном спектрометре.

Предполагается, что имеется программа расчета траектории частицы в магнитном поле спектрометра, т. е. можно считать, что известна функция $D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Характерная особенность подхода, предложенного в работе [1], - применение полиномов Чебышева для приближенного представления упомянутой выше функции, выражающей импульс через наблюдаемые величины. Используется одно замечательное свойство этих полиномов [5, 6]. Если взять полиномы Чебышева в виде

$$T_0(x) = \sqrt{\frac{1}{N}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos(k \cdot \arccos(x)) \quad , \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (1)$$

то они будут ортонормированны на системе точек

$$X_a = \cos(\pi \cdot (2a - 1) / 2N), \quad a = 1, \dots, N, \quad (2)$$

т.е.

$$(T_j, T_k) = \sum_{a=1}^N T_j(X_a) \cdot T_k(X_a) = \delta_{jk}. \quad (3)$$

(Индексы j и k в [1] не указаны, но правильные их значения $j = 0, \dots, N - 1, k = 0, \dots, N - 1$. Поэтому при вычислении сумм, в которых участвуют полиномы Чебышева, надо использовать для индекса "a_i" диапазон $a_i = 0, \dots, N_i - 1$. Заметим, что точки X_a - это нули полинома Чебышева $T_N(X)$ степени N .)

При работе с полиномами Чебышева желательно, чтобы аргументы принимали значения в диапазоне $[-1, 1]$. Этого можно достичь заменой переменной по правилу $\xi = (2x - A - B)/(B - A)$, где $[A, B]$ – диапазон изменения переменной x . (Иногда, например при работе с функцией D , приходится выражать x через ξ : $x = (A + B)/2 + \xi(B - A)/2$.) Для каждого аргумента выбирается дискретная сетка: $\xi_{1a_1}, a_1 = 1, \dots, N_1, \xi_{2a_2}, a_2 = 1, \dots, N_2, \dots, \xi_{5a_5}, a_5 = 1, \dots, N_5$. Для x_1, x_2, x_3, x_4 сетки чебышевские (например, точки сетки ξ_{1a_1} - это нули полинома Чебышева $T_{N_1}(X)$ степени N_1), а для x_5 сетка может быть и другого типа, например равномерная. (Она используется на промежуточном шаге для обратной интерполяции.) Для возможного диапазона значений функции D строится чебышевская сетка $\xi_{6a_6}, a_6 = 1, \dots, N_6$.

Дальше вычисления проводятся следующим образом. Организуются вложенные циклы по a_1, a_2, a_3, a_4 . Внутри этих циклов выполняются два действия:

1) организуется цикл по a_5 . В нем, для заданного набора a_1, a_2, a_3, a_4 , вычисляются M_5 значений ξ_6 , равных нормализованной (т.е. переведенной в диапазон $[-1, 1]$) $D(\xi_{1a_1}, \xi_{2a_2}, \xi_{3a_3}, \xi_{4a_4}, \xi_{5a_5})$;

2) организуется цикл по a_6 . В нем, с помощью обратной интерполяции, для каждого узла сетки ξ_{6a_6} , вычисляется соответствующее значение ξ_5 . Эти значения накапливаются в пятимерном массиве $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$;

3) в результате получится массив значений $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$, где $a_1 = 1, \dots, N_1, a_2 = 1, \dots, N_2, a_3 = 1, \dots, N_3, a_4 = 1, \dots, N_4, a_6 = 1, \dots, N_6$. Всего в массиве будет $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \cdot N_6$ элементов. В нем содержится информация о зависимости импульса (ξ_5) от наблюдаемых величин.

Требуется на основе массива значений $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$ построить функцию $\xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6)$ от непрерывных аргументов в виде ряда

$$\begin{aligned} & \xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6) = \\ & = \sum_{a_1=1}^{N_1} \sum_{a_2=1}^{N_2} \sum_{a_3=1}^{N_3} \sum_{a_4=1}^{N_4} \sum_{a_6=1}^{N_6} C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6} \cdot T_{a_1-1}(\xi_1) \cdot T_{a_2-1}(\xi_2) \cdot T_{a_3-1}(\xi_3) \cdot T_{a_4-1}(\xi_4) \cdot T_{a_6-1}(\xi_6). \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$ в формуле (4) легко получить, используя ортонормированность полиномов Чебышева (1) [4].

Процесс вычисления $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$ можно записать в виде одной формулы:

$$C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6} = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_3=1}^{N_3} \sum_{n_4=1}^{N_4} \sum_{n_6=1}^{N_6} \xi_{5n_1 n_2 n_3 n_4 n_6} \cdot T_{a_6-1, n_6} \cdot T_{a_4-1, n_4} \cdot T_{a_3-1, n_3} \cdot T_{a_2-1, n_2} \cdot T_{a_1-1, n_1}, \quad (5)$$

где $T_{a_1-1, n_1} = T_{a_1-1}(\xi_{1n_1}), \dots, T_{a_6-1, n_6} = T_{a_6-1}(\xi_{6n_6})$.

Итак, традиционный подход к вычислению функции $\xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6)$ – интерполяция с применением полиномов Чебышева по формулам (4) и (5).

2. Модификации метода с полилинейной интерполяцией

Функцию (4) можно представить и в виде, отличном от ряда из полиномов Чебышева. В настоящей работе предлагается более простой и наглядный подход, который использует полилинейную интерполяцию.

По структуре алгоритм подобен первому, поэтому мы в основном сохраним обозначения, но укажем изменения в их значениях. Для каждого аргумента x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 выбирается равномерная дискретная сетка: $\xi_{1a_1}, a_1 = 1, \dots, N_1, \xi_{2a_2}, a_2 = 1, \dots, N_2, \dots, \xi_{5a_5}, a_5 = 1, \dots, N_5$. Для возможного диапазона значений функции D строится равномерная сетка $\xi_{6a_6}, a_6 = 1, \dots, N_6$.

Организуются вложенные циклы по a_1, a_2, a_3, a_4 . Внутри этих циклов выполняются два действия:

1) организуется цикл по a_5 . В нем для заданного набора a_1, a_2, a_3, a_4 , вычисляются M_5 значений ξ_6 равных, $D(\xi_{1a_1}, \xi_{2a_2}, \xi_{3a_3}, \xi_{4a_4}, \xi_{5a_5})$ (нормализация не нужна);

2) организуется цикл по a_6 . В нем с помощью обратной интерполяции для каждого узла сетки ξ_{6a_6}

вычисляется соответствующее значение ξ_5 . Эти значения запасаются как элементы пятимерного массива $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$. В результате получится массив значений $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$, где $a_1 = 1, \dots, N_1, a_2 = 1, \dots, N_2, a_3 = 1, \dots, M_3, a_4 = 1, \dots, N_4, a_6 = 1, \dots, N_6$. Всего в массиве будет $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \cdot N_6$ элементов. В нем содержится информация о зависимости импульса (ξ_5) от наблюдаемых величин.

Функцию $\xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6)$ от непрерывных аргументов построим с помощью полилинейной интерполяции на основе массива значений $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$. Для этого, прежде всего, надо для сеток определить номера интервалов, в которые попадают значения соответствующих аргументов. Пусть ξ_1 попадает в интервал $[\xi_{1a_1}, \xi_{1a_1+1}]$, ξ_2 попадает в интервал $[\xi_{2a_2}, \xi_{2a_2+1}]$ и т.д. (т. е. в данном случае индексы a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 обозначают номера соответствующих интервалов). Зададим весовые коэффициенты по правилу

$$w_{11} = (\xi_1 - \xi_{1a_1}) / (\xi_{1a_1+1} - \xi_{1a_1}), \quad w_{10} = 1 - w_{11}, \quad (6)$$

$$w_{21} = (\xi_2 - \xi_{2a_2}) / (\xi_{2a_2+1} - \xi_{2a_2}), \quad w_{20} = 1 - w_{21},$$

.....

$$w_{61} = (\xi_6 - \xi_{6a_6}) / (\xi_{6a_6+1} - \xi_{6a_6}), \quad w_{60} = 1 - w_{61}.$$

Функцию $\xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6)$ теперь запишем в виде суммы с весами 32-х значений из массива $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$ (когда пять индексов дают разные сочетания значений a_1 или $a_1 + 1, a_2$ или $a_2 + 1, \dots, a_6$ или $a_6 + 1$):

$$\begin{aligned} \xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6) = & (7) \\ & = w_{10} \cdot w_{20} \cdot w_{30} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6} + \\ & + w_{11} \cdot w_{20} \cdot w_{30} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1+1, a_2, a_3, a_4, a_6} + \\ & + w_{10} \cdot w_{21} \cdot w_{30} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1, a_2+1, a_3, a_4, a_6} + \\ & + w_{11} \cdot w_{21} \cdot w_{30} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1+1, a_2+1, a_3, a_4, a_6} + \\ & + w_{10} \cdot w_{20} \cdot w_{31} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1, a_2, a_3+1, a_4, a_6} + \\ & + w_{11} \cdot w_{20} \cdot w_{31} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1+1, a_2, a_3+1, a_4, a_6} + \\ & + w_{10} \cdot w_{21} \cdot w_{31} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1, a_2+1, a_3+1, a_4, a_6} + \\ & + w_{11} \cdot w_{21} \cdot w_{31} \cdot w_{40} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_4, a_6} + \\ & + w_{10} \cdot w_{20} \cdot w_{30} \cdot w_{41} \cdot w_{60} \cdot \xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4+1, a_6} + \\ & \dots \dots \dots \\ & + w_{10} \cdot w_{21} \cdot w_{31} \cdot w_{41} \cdot w_{61} \cdot \xi_{5a_1, a_2+1, a_3+1, a_4+1, a_6+1} + \\ & + w_{11} \cdot w_{21} \cdot w_{31} \cdot w_{41} \cdot w_{61} \cdot \xi_{5a_1+1, a_2+1, a_3+1, a_4+1, a_6+1} . \end{aligned}$$

Итак, интерполирующая функция вычисляется по формуле (7) с весовыми коэффициентами (6).

В предложенной модификации метода объем требуемых вычислений небольшой. Точность алгоритма регулируется выбором частоты сеток $\xi_{1a_1}, \xi_{2a_2}, \xi_{3a_3}, \xi_{4a_4}, \xi_{5a_5}, \xi_{6a_6}$.

3. Тестирования алгоритмов

Важный этап тестирования – выбор модельной функции, задающей зависимость между величинами $x_1, x_2, x_3, x_4, P = x_5$ на входе и углом поворота $D = x_6$. Желательно, чтобы такая функция была подобна реальной зависимости, а необходимое требование – строго монотонная зависимость D от P при фиксированных x_1, x_2, x_3, x_4 (условие существования обратной функции). Брался, в частности, вариант

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4, P) = d \cdot 0,3 \cdot Z \cdot B / P + (x_4 - x_2) / L + f(x_1, x_3), \quad (8)$$

где d – продольный размер области магнитного поля; Z – заряд частицы; B – напряженность магнитного поля; L – расстояние между пропорциональными камерами; f – моделирует слабую зависимость D от x_1 и x_3 .

Моделирование проводилось по схеме: многократно генерировались различные наборы параметров на входе и по ним определялся угол D

$$x_1, x_2, x_3, x_4, P \Rightarrow D$$

и затем к измеряемым величинам добавлялась погрешность и определялся импульс P

$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3, x_4 + \xi_4, D + \xi_6 \Rightarrow P.$$

Сравнение полученного значения и значения P на входе позволяет судить о точности определения импульса рассматриваемым методом. При нулевом уровне погрешностей получим оценку ошибки метода. Тестирование показывает, что ошибка метода зависит, в основном, от подробности сеток $\xi_1 a_1, a_1 = 1, \dots, M_1, \xi_2 a_2, a_2 = 1, \dots, M_2, \dots, \xi_5 a_5, a_5 = 1, \dots, M_5$ и, особенно, от $\xi_6 (a_6, a_6 = 1, \dots, M_6)$. (Это связано с тем, что диапазон значений функции D определяется по всему набору возможностей и для каждого конкретного случая оказывается взятым с запасом.) Можно сделать вывод, что оба реализующих рассмотренный метод алгоритма показывают согласованные результаты. При этом первый алгоритм требует более долгих вычислений.

Результаты тестов для второго алгоритма представлены в виде диаграммы на рис. 2. Из рисунка видно, что для предлагаемого алгоритма ошибка метода при выбранных сетках (5, 10, 10, 20, 40, 100 точек для сеток $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ соответственно) не превышает 0,5 %. При моделировании погрешности на уровне 1,0 мм при измерении координат точек x_1, x_2, x_3, x_4 и соответствующей погрешности измерения угла D получаем, что относительная погрешность определения импульса обычно не превосходит 3 - 3,5 %.

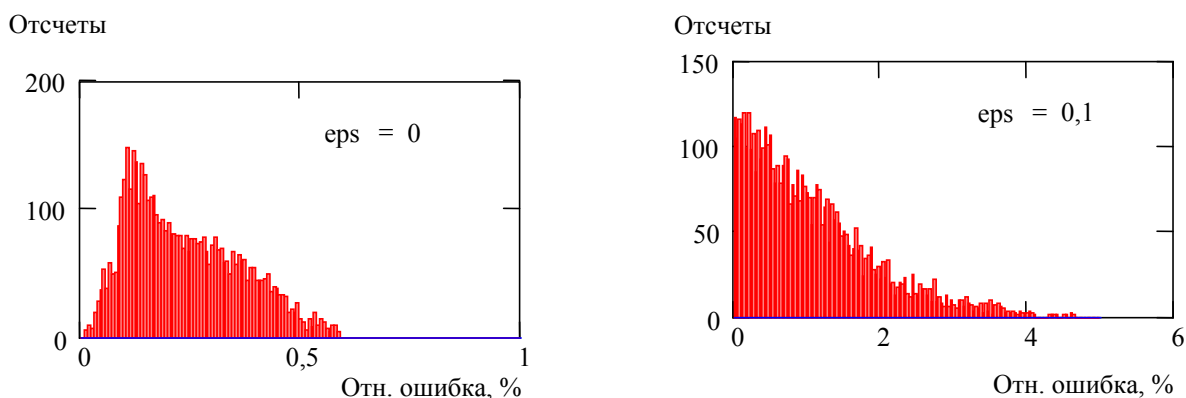


Рис. 2. Распределение относительной ошибки в определении импульса для алгоритма с полилинейной интерполяцией в отсутствие погрешности в измеряемых величинах (погрешность метода) и при наличии погрешности в измеряемых величинах ($\pm \text{eps}$ для x_1, \dots, x_4 и $\pm \text{eps} \cdot 10^{-3}$ для x_6).

Метод для заданного интервала импульсов в модельных условиях дает относительную погрешность не более 3 - 3,5 %. Потенциально есть возможность несколько увеличить точность определения импульса за счет выбора более подробных сеток.

К достоинствам предложенного подхода можно отнести то, что сетки аргументов равномерные, замена переменной не нужна, выражение интересующей нас функции имеет простой вид и легко вычисляется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lechanoine C., Martin M., Wind H.* Method for Efficient Magnetic Analysis in an Inhomogeneous Field // Nuclear Instruments and Methods. - 1969. - Vol. 69. - P. 122 - 124.
2. *Ажгирей Л. С., Агустиньяк В., Фару Л. и др.* Процедура восстановления импульса для нефокусирующего спектрометра с широкоапертурным анализирующим магнитом и неоднородным магнитным полем. Краткие сообщения ОИЯИ, № 2(94)-99. - Дубна, 1999. - С. 5 - 15.
3. *Alkhazov G. D., Kravtsov A. V., Prokofiev A. N.* Momentum Reconstruction for Particles Registered by the Forward Spectrometer of the SPES4- π Set-up. - Preprint 2246. - Gatchina, 1998. - 29 p.
4. *Соколов А. М.* Определение импульса частицы в магнитном спектрометре по методу Винда. - Киев, 2004. - 10 с. - (Препр. / НАН Украины. Ин-т ядерных исслед.; КИЯИ-04-4).
5. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. - М.: Изд-во. физ.-мат. лит., 1961.
6. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. - М.: Мир, 1980.

MODIFICATION OF THE WIND'S METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE PARTICLE MOMENTUM IN THE MAGNETIC SPECTROMETER

A. M. Sokolov

The method for the determination of the charged particle momentum by measurement of its trajectory in spectrometer magnetic field, that was described in [1], is turned out to be convenient and rather often in use [2, 3]. In paper [1] also a way to realise this method was proposed. Its characteristic feature is approximation of dependences by Chebyshev polynomials. In present paper simple and visual approach based on polylinear interpolation is proposed. An assesment of both algorithms was done by testing in model conditions.

МОДЕФІКАЦІЯ МЕТОДУ ВІНДА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ІМПУЛЬСУ ЧАСТИНКИ В МАГНІТНОМУ СПЕКТРОМЕТРІ

О. М. Соколов

Метод визначення імпульсу зарядженої частинки по вимірюванням її траєкторії в магнітному полі спектрометра, що описаний у [1], виявився зручним і досить часто застосовується [2, 3]. У роботі [1] було запропоновано й засіб реалізації вказаного методу. Його характерна особливість – застосування поліномів Чебишева для наближеного представлення залежностей. У даній роботі пропонується простий і наочний підхід, який застосовує полілінійну інтерполяцію [4]. Для оцінки двох алгоритмів було проведено їх тестування в модельних умовах.